

A pályázat címe: **Rugalmas-képlékeny tartószerkezetek topológiai
optimalizálásának néhány különleges feladata**

(Részletes jelentés)

Az alábbiakban a pályázat keretében elért kutatási eredményeket foglaljuk össze. Valamennyi témában számos példát is megoldottunk és azok eredményei alapján parametrikus vizsgálatokat folytattunk. Ezek ismertetésére ezen a helyen nincs lehetőség, de ezek, és a kutatások részletes ismertetése, a fejezetek címeinél feltüntetett, a mellékelt közlemények listájára hivatkozó folyóirat-cikkekben illetve kiadványokban megtalálhatók. Az összefoglalásnál azt az elvet követtük, hogy a nagyobb terjedelmű munkákból részletesebb, míg a kisebbekből rövid összefoglalást adunk.

**1 Dinamikusan terhelt tartószerkezetek optimális tervezése a maradó
alakváltozások és elmozdulások korlátozásával [1, 2,3,5, 7, 9,11,12,22]**

A mérnöki gyakorlatban igen gyakran fordul elő rendkívüli terhelés (robbanás, ütés, ütközés, földrengés, stb...). Ezekben az esetekben a képlékeny alakváltozások rendszerint megengedettek, de a tartószerkezeteket olyan merevségi és szilárdsági tulajdonságokkal kell megtervezni, hogy a rendkívüli hatások következtében ne legyenek túlzott mértékű képlékeny alakváltozások, a szerkezeti elemek ne szenvedjenek törést, illetve a szerkezet összeomlása ne következzen be.

Ebben a részben olyan közelítő optimális tervezési eljárást mutatunk be dinamikusan (lökés, robbanás, ütközés) terhelt képlékeny tartószerkezetek (rácsos tartók, gerendák, lemezek) optimális tervezésére, ahol a mindenkori terhelésből az impulzusmegmaradás tételének felhasználásával egy egyenértékű sebességmezőt számolunk. Ezt a sebességmezőt használjuk impulzív teherként a már terheletlen tartón. Mivel ilyen esetekben az elmozdulások rendszerint nagyok, mérsékelten nagy elmozdulásokat veszünk számításba. A tartószerkezet képlékeny viselkedésének szabályozására Wierzbicki által kidolgozott elméletet alkalmazzuk. Ennek felhasználásával a mérsékelten nagy maradó alakváltozások nagyságának egy felső korlátja számítható. Mivel nagy sebességekről van szó, az alakváltozás-sebesség érzékenységet (viszkozitás) figyelembe vesszük, tudva, hogy ezzel növekszik a szerkezet teherbíró képessége.

Az optimális tervezés numerikus megfogalmazásánál a porózus anyagelméletet használtuk fel. A tervezés során a keresztmetszeti méretek egy alapértékét (pl. lemez vastagsága) ismertnek tételezzük fel, és a folyamatban változatlanul hagyjuk. A tényleges méretet az x_i tervezési változó (porozitási tényező) felhasználásával a szerint számoljuk (pl. lemez esetén $h_i = x_i h_0$).

A továbbiakban a jobb megérthetőség kedvéért lemez-feladaton keresztül mutatjuk be a tervezési munkát. A kapott eredmények természetesen minden nehézség nélkül átírhatók rácsos tartókra, gerendákra vagy héjakra is.

A bemutatásra kerülő eljárás az alábbi követelményeket és feltételt elégíti ki:

- a szerkezet súlya legyen minimális,
- egy előre megadott pontban a maradó eltolódások nagysága nem haladhat meg egy megadott értéket,
- a deformációs folyamat alatt a teljes kinetikus energia képlékeny munka formájában disszipálódik.

1.1 Nagy intenzitású, rövid ideig ható lökészerű terhelés esete

1.1.1 Kinematikai egyenletek

Induljunk ki abból a feltevésből, hogy a dinamikai egyenletekben szereplő tömeg két részből tehető össze:

$$m(y, z) = m_0(y, z) + m_s(y, z). \quad (1.1)$$

Legyen $(i = 1, 2, \dots, n)$ a diszkretizált szerkezetben a végelemek száma és a (1.1) kifejezésben:

- $m_0(y, z) \rightarrow m_{0i}$: jelenti azt a tömeget, ami nem vesz részt az optimálásban,
- $m_s(y, z) \rightarrow \rho_0 h_0 x_i$: jelenti a tartószerkezet tömegének az optimálásban számítandó részét, amely a tervezési változóval kifejezhető,
- y és z a lemez középfelületének koordinátái.

A fentiek szerint az i -edik végelem tömege az alábbi módon fejezhető ki:

$$m_i = m_{0i} + \rho_0 h_0 x_i. \quad (1.2)$$

Tételezzük fel, hogy a vizsgált merev-képlékeny anyagú lemezt olyan, nagy intenzitású, rövid ideig tartó dinamikus teher terheli, mely az alábbi szeparálható alakban van megadva:

$$q(y, z, t) = p(t) q_0(y, z), \quad (1.3)$$

Illetve a diszkretizált szerkezet i -edik eleménél

$$q_i = p(t)q_{0i}; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

Itt $p(t)$ a lökés időbeli változását, $q_0(y, z)$ pedig a teher lemezen való eloszlását írja le. A továbbiakban alkalmazzuk a leggyakrabban felhasznált lökésterhet, amelyben a lökés időbeli változása a következő kifejezésekkel írható le:

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= p_0, & \text{ha } t \leq t_0 \\ p(t) &= 0, & \text{ha } t > t_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Itt t_0 a lökés időtartamát, p_0 pedig nyomás csúcsértékét jelenti. Amennyiben p_0 igen nagy ($p_0 \rightarrow \infty$) és t_0 igen kicsi ($t_0 \rightarrow 0$), akkor a lökésszerű teher az

$$I_0 = p_0 t_0 \quad (1.6)$$

impulzussal meghatározott impulzív terheléssel helyettesíthető.

A lemez ennek hatására $v(y, z)$ kezdősebességű mozgásnak indul, amelynek eloszlása impulzusmegmaradás tételéből vezethető le:

$$\int_A \int_0^{t_0} q(y, z, t) dt dA = \int_A m(y, z) v(y, z) dA. \quad (1.7)$$

Felhasználva az előző kifejezéseket

$$I_0 \int_A q_0(y, z) dA = \int_A m(y, z) v(y, z) dA. \quad (1.8)$$

Itt A a lemez középfelületének területét jelenti. A továbbiakban feltételezzük, hogy v_i sebesség a lemez mentén való eloszlása a q_{0i} teher eloszlásával arányos, így:

$$v = v_0 q_0(y, z). \quad (1.9)$$

Itt v_0 egy ismeretlen sebességparaméter.

Ennélfogva a sebességmező számítható:

$$v(y, z) = I_0 q_0(y, z) \frac{\int_A q_0(y, z) dA}{\int_A m(y, z) q_0(y, z) dA}. \quad (1.10)$$

A kapott kifejezést felhasználva, a diszkretizált szerkezet i -edik ($i=1, 2, \dots, n$) elemére jutó v_i kezdősebesség az alábbi formában számítható:

$$v_i = I_0 q_{0i} \frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \Delta_i}{\sum_{i=1}^n m_i q_{0i} \Delta_i}; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.11)$$

Itt Δ_i az elem területe, i pedig az elem jele.

Ezzel a nagy intenzitású, rövid ideig tartó lökésszerű teherrel terhelt szerkezet dinamikai vizsgálata egy terheletlen, a $v(y, z)$ kezdősebességű lemez dinamikai vizsgálatára vezethető vissza.

1.1.2 Dinamikai egyenlet megadása lökésszerű teher esetén

A dinamikai egyenlet felírásához felhasználjuk Wierzbicki feltételezését, ami szerint a szerkezet minden pontjában a mozgás egyidejűleg szűnik meg. Továbbá feltételezzük, hogy az impulzus teher hatására a szerkezet minden eleme a mozgás közben állandó gyorsulással mozog a megállásig és egy adott A pontban az u_A elmozdulás elér egy u_{A0} elmozdulásértéket. A szerkezet mozgása közben a lemez és az állandó teher súlyának, a tehetetlenségi erőknek és a belső erőknek dinamikus egyensúlyban kell lenniük, és a diszkretizált szerkezet minden elemében ki kell elégíteniük a képlékenységi feltételeket. Bizonyos egyszerűsítési feltételeket bevezetve ezek a követelmények az alábbi egyenletek kielégítése esetén teljesülnek:

$$\mathbf{GQ} + \mathbf{P}(x_i) - \mathbf{D}(x_i) = \mathbf{0}; \quad (1.12)$$

$$f_i(Q_i, x_i \sigma_{yi}^d) \leq 0, (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.13)$$

Itt \mathbf{G} az egyensúlyi mátrix, f_i az i -edik elem folyási függvénye, σ_{yi}^d a „dinamikus” folyáshatár (benne tudjuk figyelembe venni az alakváltozás-sebesség (viszkózitás) hatását is).

A külső erők két részből tevődnek össze. A lökéssel egyidejűleg fellépő normál (használati) csomóponti teherből és az önsúlyból, amelyet a következő egyenlettel adhatunk meg:

$$P_i = P_i^n + g \Delta_i (m_{0i} + \rho_0 h_0 x_i); (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.14)$$

Itt P_i^n jelenti a normál (használati) csomóponti terhet, amelyet a nagy intenzitású, rövid ideig tartó dinamikus teherrel egyidejűleg figyelembe veszünk.

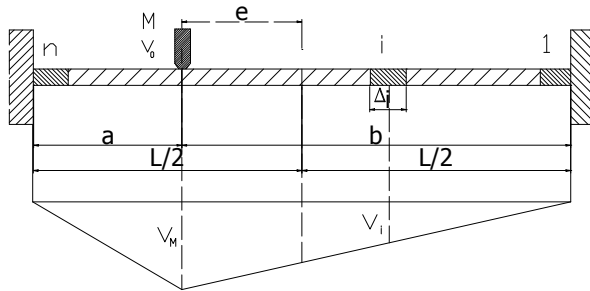
A $\mathbf{D}(x_i)$ inerciaerőket lökésteher esetén a következő kifejezéssel adhatjuk meg diszkretizált esetben:

$$D_i = \frac{q_{0A}}{2u_{A0}} I_0^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \Delta_i}{\sum_{i=1}^n m_i q_{0i} \Delta_i} \right)^2 m_i q_{0i} \Delta_i; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.15)$$

1.2 Leeső teher

1.2.1 Kinematikai egyenletek

Tekintsük egy az előző fejezetben ismertetett elrendezésű merev-képlékeny anyagú lemezt, amelyre a lemez A pontjában v_0 sebességgel egy M tömegű test merőlegesen becsapódik.



1 ábra. Leeső teher két oldalon befogott szerkezet esetén

Továbbá tegyük fel, hogy az ütközés után a lemez és a test együtt mozog, és az ütközés következtében keletkező helyi szerkezeti károkat figyelmen kívül hagyhatjuk. A lemezekre bemutatott megoldási módszer és a megadott kifejezések kis módosítások után alkalmasak gerendák, héjak és egyéb védőszerkezetek optimális tervezésére is.

Tételezzünk fel egy kinematikailag lehetséges sebességmezőt, ahol az i -edik elem sebessége a $v_i = \beta_i v_A$ egyenlettel kifejezhető. Itt v_A az M tömeg kezdő sebessége az ütközés után. Felírva az impulzus megmaradás törvényét:

$$Mv_0 = Mv_A + v_A \sum_{i=1}^n \beta_i m_i, \quad (1.16)$$

a lemez minden i -edik elemére a kezdeti sebesség könnyen számítható:

$$v_i = \frac{M \beta_i}{M + \sum_{i=1}^n \beta_i m_i} v_0. \quad (1.17)$$

1.2.2 Dinamikai egyenlet megadása ütőszerű teher esetén

Felhasználva a lökésszerű teher esetén bevezetett feltevéseket, az előző fejezetben megadott dinamikai egyenletek természetesen változatlan formában érvényesek, csak az egyes kifejezések tartalma módosul. A leeső tehernek megfelelően az inerciaerő számítása a

$$D_i = \frac{v_0^2}{2u_{A0}} \left(\frac{M}{M + \sum_{i=1}^n m_i \beta_i} \right)^2 [\delta M + m_i \beta_i \Delta_i]; (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.18)$$

egyenlet szerint történik, míg a számításban figyelembe vett külső erőt a

$$P_i = P_i^n + g \Delta_i (m_{0i} + \rho_0 h_0 x_i) + \delta_i g M; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.19)$$

szerint számítjuk.

Itt $\delta_i = 1$ ha $i \equiv A$, illetve $\delta_i = 0$ ha $i \neq A$.

1.3 Maradó elmozdulások felső korlátja

Az egyszeri alkalommal működő lökésszerű terhelés vizsgálatokor a beállásvizsgálat szükségtelen, és a képlékeny alakváltozások mértékét korlátozó előzőekben ismertetett feltételt sem alkalmazzuk. A várhatóan nagy alakváltozások miatt a rugalmas alakváltozásokat figyelmen kívül hagyjuk, a maradó eltolódásokra azonban mérsékelt mértékű nagy elmozdulások figyelembevételével korlátot alkalmazunk. Wierzbicki (1970) tétele szerint impulzív terhelés esetén egy mérsékelt nagy elmozdulást végző merev-képlékeny anyagú tartó egy adott A pontjában létrejövő eltolódás legjobb u_A felső korlátját az alábbi összefüggés adja meg:

$$T_{A0} \left[u_A + \frac{h_0 a}{1 + \alpha} \left(\frac{u_A}{h_0} \right)^{\alpha+1} \right] \leq K. \quad (1.20)$$

Ebben α és $a \geq 1$ mérsékelt nagy elmozdulás figyelembevételével elvégzett statikai vizsgálat alapján kiszámítható állandók,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \Delta_i \quad (1.21)$$

a lemez kezdősebességének megfelelő kinematikai energia és T_{A0} a tartó A pontjában, az u_A eltolódás irányában működő T_A statikus koncentrált erő képlékeny határértéke. Ez a képlékeny határállapot vizsgálat statikai tétele alapján határozható meg:

$$\max T_{A0} \quad (1.22.a)$$

az alábbi feltételek esetén

$$\mathbf{GR} = \mathbf{T}; \quad (1.22.b)$$

$$f_i(R_i, \sigma_{y0}) \leq 0; (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1.22.c)$$

$$x_0 - x_i \leq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.22.d)$$

Itt \mathbf{R} az ismeretlen csomóponti erőket jelöli. A fentiek felhasználásával a továbbiakban az A pontbeli eltolódás nagyságára az alábbi korlát írható elő:

$$u_A - u_{A0} \leq 0. \quad (1.23)$$

Itt u_{A0} az eltolódás megengedett értékét jelöli.

1.3.1 A dinamikus határfeszültség meghatározása

Mivel a lemez nagy sebességű mozgást végez, ezért indokolt az anyag viszkózus viselkedésének figyelembevétele (Perrone (1965), Martin és Symonds (1966)). Ezt a hatást

$$\sigma_{yi}^d = \Psi_i \sigma_{y0} \quad (1.24)$$

dinamikus folyási határ bevezetésével vesszük számításba, amelyet a részleteket mellőzve az alábbi módon fejezhetünk ki:

$$\sigma_{yi}^d = \sigma_{y0} \left[1 + \beta \left(\frac{v_i}{2Ch} \right)^{\frac{1}{r}} \right]. \quad (1.25)$$

Itt β , C és r az anyag viszkózus tulajdonságait jellemző állandókat jelölnek és a β állandó a

$$\beta = \frac{2r}{2r+1}$$
 kifejezés alapján számítható.

A rövid ideig tartó, nagy intenzitású teher esetén a (1.25) egyenletet az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$\Psi_i = \left[1 + \beta \left(\frac{I_0 q_{0i} \sum_{i=1}^n q_{0i} \Delta_i}{2Ch \sum_{i=1}^n m_i q_{0i} \Delta_i} \right)^{\frac{1}{r}} \right]. \quad (1.26)$$

Figyelembe véve (3.15) kifejezéseket a porozitási elméletnek megfelelően, a mindenkori határfeszültség a $\sigma_{yi} = x_i \sigma_{yi}^d$ kifejezés alapján számítandó. Mivel $\sigma_{yi}^d \geq \sigma_{y0}$, az anyag viszkózus tulajdonságainak (az alakváltozás-sebesség) figyelembevétele mindig növeli az anyag szilárdsági, illetve merevségi tulajdonságait, ezért felhasználásával gazdaságosabb szerkezetek tervezhetők.

1.4 Az optimális tervezés alapfeladata dinamikus teher esetén

1.4.1 Kapcsolt, nemlineáris matematikai programozási megfogalmazás

Felhasználva a fentiekben ismertetett képleteket, és a lemez tömegét választva célfüggvénynek, az optimális tervezés feladata rövid ideig tartó, nagy intenzitású terhelés esetén az alábbiakban fogalmazható meg:

$$\min h_0 \rho_0 \sum_{i=1}^n \Delta_i x_i \quad (1.27.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{GQ} + \mathbf{P}(x_i) - \mathbf{D}(x_i) = \mathbf{0}; \quad (1.27.b)$$

$$f_i(Q_i, x_i, \Psi_i, \sigma_{y0}) \leq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1.27.c)$$

$$x_{i0} - x_i \leq 0; \quad (1.27.d)$$

$$T_{A0} \left[u_A + \frac{h_0 a}{1 + \alpha} \left(\frac{u_A}{h_0} \right)^{\alpha+1} \right] - \frac{1}{2} I_0^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \Delta_i}{\sum_{i=1}^n m_i(x_i) q_{0i} \Delta_i} \right)^2 \sum_{i=1}^n m_i(x_i) q_{0i}^2 \Delta_i \leq 0; \quad (1.27.e)$$

$$u_A - u_{A0} \leq 0. \quad (1.27.f)$$

$$\text{Összekapcsolva a} \quad \max T_{A0} \quad (1.28.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{GR} = \mathbf{T}; \quad (1.28.b)$$

$$f_i(R_i, x_i, \sigma_{y0}) \leq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1.28.c)$$

$$x_0 - x_i \leq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.28.d)$$

feltételes szélsőérték-feladattal. Megállapítható, hogy a tárcsa-feladathoz hasonlóan a dinamikusan terhelt lemez optimális tervezését is két, az x_i tervezési változók által összekapcsolt nemlineáris matematikai programozási feladat határozza meg. A megoldásra iterációs eljárást dolgoztunk ki, melynek részletei a hivatkozott dolgozatokban megtalálható.

1.4.2 Többcélfüggvényes megfogalmazás

Itt is követhetjük a rácsos tartók tervezésénél ismertetett eljárást a vektoroptimálási feladat felírása kapcsán. Ebben a megfogalmazásban a leeső teher esetén megadott egyenleteket használjuk. A célfüggvény a lemez tömegét és a statikailag elérhető erőt tartalmazza. A

képlékeny határállapot statikai tételére alapuló többcélűfüggvényes tervezési feladat megfogalmazása a következőképp adható meg:

$$\min \left(h \rho_0 \sum_{i=1}^n \Delta_i x_i, -T_{A0} \right) \quad (1.29.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{GQ} + \mathbf{P}(x_i) - \mathbf{D}(x_i) = 0; \quad (1.29.b)$$

$$f_i(Q_i, x_i, \sigma_{y0}^d) \leq 0; (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1.29.c)$$

$$x_i - x_0 \leq 0; (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1.29.d)$$

$$T_{A0} \left[u_A + \frac{ha}{1+\alpha} \left(\frac{u_A}{h} \right)^{\alpha+1} \right] - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i(x_i) v_i^2(x_i) \Delta_i + M v_M^2(x_i) \right] \leq 0; \quad (1.29.e)$$

$$u_A - u_{A0} \leq 0; \quad (1.29.f)$$

$$\mathbf{GR} = \mathbf{T}; \quad (1.29.g)$$

$$f_i(R_i, x_i, \sigma_{y0}) \leq 0; (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.29.h)$$

Itt a $\sigma_{y0}^d(x_i)$ dinamikus határfeszültség minden lépésben újra számítandó. Rövid ideig tartó, nagy intenzitású terhelés esetén a (1.29) feladatban $M=0$ a (1.29.e) kifejezésben. Ez a tény felhasználható (1.27) feladatban, ha leeső teherre kívánjuk megoldani. A (1.29) feladat numerikus megoldására több módszer létezik. Ezek megtalálhatók a jelentés közleményei között.

1.5 Szeizmikus terhelés

A lökésszerű, illetve a leeső terheléssel terhelt tartók optimális tervezésénél alkalmazott elveket a földrengés esetére is kiterjesztettük az EUROCODE 8 ajánlásainak figyelembevételével. Az eljárás szeizmikus terhelésű keretvázaz épületek optimális tervezését teszi lehetővé. A módszer az elmozdulásokat is korlátozza.

Az eljárás alapja az EUROCODE 8-ra épülő „pushover” módszer. Benne a többszabadságfokú rendszer dinamikai vizsgálatát egy egyszabadságfokú rugalmas-képlékeny tartószerkezet statikai vizsgálatára redukáljuk. Az eljárás numerikus modellje és az optimális tervezés részletei a kapcsolódó dolgozatokban megtalálhatók.

2 Rugalmas-képlékeny szerkezetek méretezése időben változó statikus

jellegű terhelés esetén parametrikus matematikai programozással [13, 17, 18, 23, 24, 25]

A tartószerkezetek számításánál az esetek igen jelentős részében az idő független változóként szerepel. Ez jelentősen megnehezítheti az időtől függő anyagjellemzőket tartalmazó feladatok megoldását. Ha az időt az állapotathatározók paramétereiként vezetjük be, akkor a Hamilton-elv segítségével könnyebben megoldható feladatokra jutunk. Számítási eljárásokat dolgoztunk ki időben változó statikus jellegű terhelés esetére, amelyben a szerkezet választ tartalmazó állapotathatározók időtől függő függvényekkel írhatók le. A peremérték-feladatok megoldását az állapotathatározók időben végtelen függvénysorával közelítve matematikai programozással oldottuk meg. A megoldás lényege, hogy az időtől függő állapotathatározókat a L^2 térben hely szerint véges tartományokra bontással írjuk fel. A feladatot transzformáljuk a ℓ^2 térbe, ahol a feladat megoldható és a kapott eredmény a L^2 függvénytérbe visszatranszformálható. Egyszerűbben kifejezve: az eredeti feltétel nélküli szélsőérték-feladatot felbontjuk feltételes matematikai programozási feladatra, és kétszeres (oda és vissza) matematikai transzformáció felhasználásával oldjuk meg azt - a megoldás folyamatában más matematikai térben dolgozunk - . A duális probléma fizikai értelmezésével ellenőriztük a matematikai programozási feladat helyességét. Megmutatjuk, hogy a kapott modellek milyen feltételekkel használhatók a klasszikus képlékenységtani optimális méretezési feladatként. A bemutatásra kerülő eljárás összetett mechanikai folyamatok numerikus megoldását lehetővé teszi, de itt az egyszerűség kedvéért az eljárást a rugalmas-képlékeny állapotra épülő optimális tervezési módszer kidolgozásán keresztül mutatjuk be.

A matematikai programozási feladat megadási struktúrájának megfelelően a célfüggvény az egyes típusú energiákat (alakváltozási, disszipatív) tartalmazza, míg a feltételek az egyensúlyt, képlékenységi feltételeket, stb. fejezik ki. A feladat optimális megoldása nem csak az optimális keresztmetszeti méreteket, hanem az időtől függő mennyiségek (pl. képlékeny csuklóknál a nyomaték függvénye) függvényeit is közvetlenül szolgáltatja. Az alkalmazást számpélda szemlélteti.

2.1 Időtől függő terhelésű tartószerkezetek tervezése

2.1.1 Alkalmazott matematikai módszer rövid ismertetése

A mechanika számítási módszerei közül az egyik leggyakrabban alkalmazott eljárás a végeselem-módszer (VEM). Ismeretes, hogy a VEM, illetve a hasonló matematikai alapokon

működő (peremelem-módszer, végeessávok módszere, stb...) numerikus módszerek matematikai alapja a variációszámítás. A mérnöki feladatok esetén a variációszámításban keresünk egy olyan ismeretlen függvényt, ami egy határozott integrál értéket szélsőértékké, leggyakrabban minimummá teszi. A variációszámítás függvénytérben dolgozik. Az ismeretlen függvényt a megengedett függvényosztályból választhatjuk.

A variációszámítás alapfeladatát a következő módon írhatjuk fel:

$$\min \int_a^b f(x, g(x), g'(x)) dx, \quad (2.1)$$

ahol $g(x)$ az ismeretlen függvény, $f(x, g(x), g'(x))$ az alapfüggvény és $x \in [a, b]$. $g \in C^1$, $g \in M$, ahol M a megengedett függvényosztály, választása a feladattól függ.

Az alapfeladatból származtatható paraméteres variációszámítási feladat a következő módon adható meg:

$$\min \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), g(x(t)), g'(x(t)), t) dt, \quad (2.2)$$

ahol t paraméter, $x(t) \in C^0$. A (2.2) szélsőérték-feladat alapján megadható legegyszerűbb paraméteres variációszámítási feladat:

$$\min \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), t) dt. \quad (2.3)$$

Hestenes (1975) bizonyította, hogy a (2.3) feladathoz a következő matematikai programozási probléma rendelhető:

$$\min f(x(t), t); t \in [t_1, t_2]. \quad (2.4)$$

Itt az ismeretlen $x(t)$ függvényeket egy olyan halmazon értelmezzük, ahol a $[t_1, t_2]$ intervallum minden pontjához a valós számok halmazát rendeljük. Ha ezen halmaz minden pontjához létezik egy végtelenül kicsi sima görbe, akkor a (2.3) és (2.4) feladatok ugyanazt az $x(t)$ folytonos függvény határozzák meg megoldásként. Vagyis a Hestenes-tétel a függvénytérben értelmezett (2.3) paraméteres variációszámítási feladat és a (2.4) kifejezéssel értelmezett végtelen vektortérben értelmezett matematikai programozási feladat ekvivalenciáját mondja ki.

A nemegyensúlyi mechanika (pl. képlékenységtan) területén a mechanikai feladatok korrekt, illetve pontosabb megoldását biztosító matematikai eszközök helyes választása nehéz feladat. Ebben az esetben olyan eszközt választottunk, amely alkalmas erre a feladatra, sőt összetettebb

problémák (többfázisú rendszerek vizsgálata) megoldását is lehetővé teszi. Az eljárás részletes leírása megtalálható más dolgozatban.

Az állapotathatározók (pl. feszültségek, alakváltozások) egyensúlyi állapotban vektorvektortérben értelmezettek. Legyen ez a tér a diszkretizált szerkezet esetében n -dimenziós (ahol n a csomópontok száma) az X, Y, Z globális koordináta-rendszerben. Minden csomópontot meg tudunk adni a csomópontba mutató helyvektor segítségével. A ξ, η, ζ lokális koordináta-rendszerben egy állapotathatározó vektort rendelünk minden egyes helyvektorhoz. A szerkezet állapotathatározó vektorának szabadságfoka függ egyrészt a csomópontok szabadságfokától, illetve a csomópontok számától. Mivel időtől függő a feladatunk, így az állapotathatározók vektorainak elemei függvények. A mechanikai feladatot az egyszerűség kedvéért a kis elmozdulások elméletének alkalmazásával oldjuk meg, így az előzőleg ismertetett helyvektor időtől független. A Hestenes-tétel idő szerinti derivált függvények transzformálására matematikai programozási feladatban nem ad lehetőséget, ezért az állapotathatározókat általánosított Fourier-sorral írjuk fel. Bizonyított, hogy az általánosított Fourier-sorfejtés a szélsőérték tételeket nem befolyásolja. Ha a feladat minden függvényét egyugyanazon bázisban írunk fel az általánosított Fourier-sor segítségével oly módon, hogy a Hestenes-tétel feladattípusához jussunk, akkor a Hestenes-transzformáció elvégezhető. Így a bázisfüggvény függvényértékeit a feladat megoldásakor minden pontban figyelembe kellene venni. Ha a Fourier-sorbafejtett függvényeket tartalmazó feladatot oly módon transzformáljuk, hogy a bázisfüggvények függvényértékeit nem visszük át a transzformált feladatba, akkor a feladatot a Banach-térben (itt a Fritz-John-tétel bizonyított) adjuk meg, és a Fourier-együtthatók az ismeretlenek. A skalár szorzat értelmezésével áttérünk az euklédesszi térbe. Ez utóbbiban a feladatot véges dimenzióssá csonkítva, az megoldhatóvá válik.

Tekintsünk egy s dimenziós állapotathatározó függvényt. Tételezzük fel, hogy a vektor minden eleme a $L^2(\Omega)$, $\Omega[0,1]$ térnek is eleme. Itt értelmeztük az állapotathatározókat, mint olyan vektorokat, aminek elemei függvények. A $L^2(\Omega)$ tér Hilbert-tér. Lehetséges egy $P_i(t)$, ($i=1, \dots, \infty$) ortogonális polinomiális bázisrendszer felvétele az $\Omega[0,1]$ intervallumban. Írjuk fel ennek a Hilbert-térnek egy elemét a következő módon:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i(t), \quad P_i(t) \in L^2(\Omega), \quad \alpha_i \in \mathfrak{R}, \quad i = 1, \dots, \infty, \quad t \in [0,1]. \quad (2.5)$$

Itt \mathfrak{R} jelenti a valós számok halmazát. Egy csomópontához tartozó állapotathatározó leírása a következőkben definiált F térben történik: $F = \mathfrak{R}^3 x L_1^2 x L_2^2 x \dots x L_j^2 x \dots x L_s^2$. A szerkezet összes csomópontjához (n) rendelt állapotathatározókat az:

$$F^\ell = (\mathbb{R}^3 x L_1^2 x L_2^2 x \dots x L_j^2 x \dots x L_s^2)^n \quad (2.6)$$

térben írhatjuk fel.

Az F^ℓ tér egy elemét a lokális koordináta-rendszerben adott állapothatározók j -edik koordináta tengelyére vetítve a következő módon kapjuk:

$$\mathbf{r}^j(t) = \sum_{k=1}^3 x_j^k(t) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} P_i^j(t) \right) \mathbf{e}_k, \quad (2.7)$$

ahol $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$; $P_i^j(t) \in L_j^2([0,1])$; $t \in [0,1]$; $j = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, \infty$.

Itt \mathbf{e}_k ($k = 1, \dots, 3$) a lokális rendszerben adott egységvektor-rendszer, $x_j^k(t)$ függvény a j -edik szabadságfokhoz tartozó állapothatározó vektorának a lokális koordináta-rendszer k -adik tengelyéhez tartozó vetületéhez rendelt függvény, $P_i^j(t)$ polinom a közelítő polinom-rendszer i -edik tagja a lokális rendszer k -adik tengelyéhez tartozóan, α_{ij} együttható a j -edik szabadságfokhoz tartozó $P_i^j(t)$ polinom i -edik együtthatója.

A teljes rendszer Fourier-együtthatóit a következő mátrixba csoportosíthatjuk:

$$[\tilde{\alpha}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 \dots \alpha_{\infty 1}^1 & \alpha_{12}^1 \dots \alpha_{\infty 2}^1 & \alpha_{1s}^1 \dots \alpha_{\infty s}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{11}^n \dots \alpha_{\infty 1}^n & \alpha_{12}^n \dots \alpha_{\infty 2}^n & \alpha_{1s}^n \dots \alpha_{\infty s}^n \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

A mechanikai feladatot az $F^\ell = (\mathbb{R}^3 x L_1^2 x L_2^2 x \dots x L_j^2 x \dots x L_s^2)^n$ térben definiáljuk és a megoldást a Fourier-együtthatók terében keressük. Bizonyították, hogy lineáris, illetve nemlineáris matematikai programozási mechanikai feladatok a következőkben ismertetésre kerülő feltétel-rendszer esetén megoldhatók, és a függvények stacionaritása létezik. A feladat ismeretlenjei a Fourier-együtthatók. Az optimális megoldás stacionárius függvény, amely kiszámításához az optimalitást definiáló elsőrendű optimalitási feltételek (Fritz-John-feltétel megadása a Stieltjes-deriváltak – függvény szerinti deriváltak - használatával) felírására van szükség. A duális feladat a Wolfe-féle duál-képzés (alapján a Stieltjes-deriváltak felhasználásával végezhető el.

A módszer hátránya, hogy egyenlőtlenségi feltétel esetén az egyenlőtlenségi feltételeket csak diszkrét időpontokban tudjuk figyelembe venni. Az előny abban mutatkozik meg, hogy az időtől függő feladat leegyszerűsödik, és egy klasszikus matematikai programozási feladatot kell megoldani. A L^2 térbe történő visszatransformálás után minden változó függvényekkel kifejezett mennyiség, és nincs szükség további hosszadalmas számításra.

2.1.2 Jelölések

A fejezetben a vizsgált tartók lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny anyagúak, alakjuk és elrendezésük (topológiájuk) adott. A vázas tartószerkezetek N ($i=1,2,\dots,N$) számú A_i keresztmetszetű és ℓ_i hosszúságú gerendát tartalmaznak, a lemezek és tárcsák pedig N ($i=1,2,\dots,N$) számú h_i vastagságú és Δ_i területű véges elemre vannak felosztva. A további fontosabb jelölések az alábbiak:

n : a csomópontok száma,

s : a csomóponti elmozdulások szabadságfoka,

Gn : a Gauss-pontok száma az egyes elemeken,

z : az elemek Gauss-pontjaiban fellépő belső erők szabadságfoka,

$\mathbf{p}(t)$: a csomópontokra ható időtől függő külső erők vektora (mérete $n.s$),

$[\mathbf{G}]^*$: a szerkezet egyensúlyi mátrixa (mérete $n.s, Gn.z$),

$[\mathbf{G}]$: a szerkezet geometriai mátrixa (mérete $Gn.z, n.s$),

$\mathbf{r}(t)$: az erő jellegű belső változó (mérete $n.s$),

$\boldsymbol{\sigma}(t)$: a belső erők vektora (mérete $Gn.z$),

$[\mathbf{F}_i]$: az i -edik szerkezeti elem hajlékonysági mátrixa (mérete $Gn.z, Gn.z$),

$[\mathbf{A}]$: az anyag disszipációs tulajdonságait tartalmazó mátrix (mérete $Gn.z, Gn.z$),

f_i, φ_i : az i -edik elem képlékenységi, illetve disszipációs folyási feltételeit tartalmazó függvények,

E, σ_y : az anyag rugalmassági modulusa és folyási határfeszültsége.

2.1.3 Mechanikai modellezés

Az előző alfejezetben bemutatott matematikai módszer kerül ebben a fejezetben felhasználásra rugalmas-képlékeny tartószerkezetek méretezésére a klasszikus képlékenységtan szélsőérték-tétele alapján. Belső változók felhasználásával az energiadisszipációt is figyelembe vesszük.

2.1.4 Rugalmas-képlékeny optimális tervezés feladatai

Ebben a részben az optimális tervezés primális és duális feladatát mutatjuk be az előző fejezetben ismertetett parametrikus matematikai programozás felhasználásával. A szerkezetet a végeselemes diszkretizációnak megfelelően osszuk fel végeselemekre! Az egyes végeselemes csomópontokhoz rendelt állapotváltozók vektorának elemei időtől függő függvények (2.1 ábra.). Az optimális tervezés feladatában az ismeretlenek rácsos tartók és gerenda tartók esetén a rúdelemek keresztmetszeti méretei, míg tárcsák és lemezek esetén az egyes elemek vastagsága.

A szerkezet anyaga rugalmas-képlékeny anyagtörvényt követ. A képlékeny tulajdonságok kifejezése az erő jellegű belső változók használatával a disszipáció figyelembevételével történik. A feladat felírásához a következő adatok szükségesek:

- a külső erők függvénye (az egyszerűség kedvéért legyen monoton növekvő),
- geometriai adatok a peremfeltételekkel (a szerkezet alapméretei, megtámasztások adatai),
- az anyag folyási határfeszültsége,
- az anyag disszipációs „határfeszültsége”,
- az elemek hajlékonyságának korlátjai,
- disszipációs mátrix, ami az anyag disszipációs tulajdonságait tartalmazza.

A méretezési feladatban kifejezzük, hogy található egy olyan szerkezet, amelyiknek minden eleme egyensúlyban van, a külső terhelés okozta belső erők (vagy valamely kombinációjuk) sehol sem lépik túl a képlékenységi határt. A disszipációs folyamat az anyag disszipációs tulajdonságának megfelelően történik (nem lehet akármekkora). A szerkezet elemei kellően merevek, azaz hajlékonyságaik nem haladnak meg egy előre megadott korlátot. A szerkezetben felhalmozódó alakváltozási, illetve disszipációs energia összege pedig minimális.

A feladatban a következő feltevésekkel számolunk:

- a kis elmozdulások elmélete érvényes,
- stabilitási problémákkal nem foglalkozunk,
- az ismeretlen mennyiségek meghatározásakor feltesszük, hogy legalább egy folytonos komponens létezik.

A rugalmas-képlékeny optimális tervezés szélsőérték-elvre épülő primális feladata a következő:

$$\min \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(t)^* [\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{r}(t)^* [\mathbf{A}] \mathbf{r}(t) \right), \quad \forall t, t \in [t_1, t_2] \quad (2.9.a)$$

az alábbi feltételek esetén

$$[\mathbf{G}]^* \boldsymbol{\sigma}(t) + [\mathbf{G}]^* \mathbf{r}(t) + \mathbf{p}(t) = 0; \quad (2.9.b)$$

$$f_i(\boldsymbol{\sigma}_k(t), k = 1, \dots, z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, Gn; \quad (2.9.c)$$

$$\varphi_i(\mathbf{r}_k(t), k = 1, \dots, z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, Gn; \quad (2.9.d)$$

$$f_i(\boldsymbol{\sigma}_k(t)) \mathbf{r}_{i_k}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, Gn, k = 1, \dots, z; \quad (2.9.e)$$

$$[\mathbf{F}_i] - [\hat{\mathbf{F}}_i] \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9.f)$$

Itt $[\hat{\mathbf{F}}_i]$ az i -edik elemnél a hajlékonysági korlátokat tartalmazó mátrix. A (2.9.a-f) matematikai programozási feladat ismeretlenjei:

- $\sigma(t)$: a belső erők függvényei,
- $\mathbf{r}(t)$: disszipációs erők függvényei,
- $[\mathbf{F}_i]$: az i -edik elemnél a keresztmetszeti adatokból kifejezett hajlékonyság.

A (2.9.a-f) parametrikus matematikai programozási feladat egyes egyenletei mechanikailag a következő tartalommal bírnak: (2.9.a) célfüggvény a szerkezet kiegészítő potenciális energiájának és a kiegészítő disszipációs energiájának összege és az energiaminimum elvét fejezi ki. A (2.9.b) az egyensúlyi egyenletek kifejezése a peremfeltételek figyelembevételével, a külső erők, belső erők, illetve disszipációs erők függvényeinek kapcsolata. A (2.9.c) egyenlőtlenség az elemek képlékenységi feltétele, míg a (2.9.d) egyenlőtlenség a disszipációs képességet szabályzó „folyási„ függvény az elemek Gauss-pontjain egyeztetve. A (2.9.e) a képlékeny viselkedésből származó disszipáció létét szabályzó komplementaritási egyenlet. A (2.9.f) egyenlőtlenségi feltétel az ismeretlen keresztmetszeti méreteket szabályzó hajlékonysági feltétel.

Az így bemutatott feladat helyességének igazolására a duális megfogalmazás felhasználásával történik. Ez és a duális megfogalmazás közleményeinkben megtalálható fizikai tartalommal bírjon, mert ezzel mindkét megfogalmazás igazolható.

2.1.5 Kapcsolat a klasszikus és a disszipációs rugalmas-képlékeny optimális méretezés feladatai között

A bemutatott tervezési feladat ellenőrzésének egy másik fontos eleme a kapcsolat megtalálása a képlékenységtan klasszikus optimális tervezési modelljei és az itt bemutatott disszipációt tartalmazó primál-duál feladatpár között.

Vizsgáljuk meg, hogy a rugalmas-képlékeny állapotban történő optimális méretezési feladatok klasszikus modellje milyen feltételekkel származtathatók a disszipációt is tartalmazó primál-duál feladatpárból. Tételezzük fel, hogy a belső változók értékei elhanyagolhatóak. Az eljárásban a statikai módszerre épülő (2.9.a-f) primál feladatot vizsgáljuk. A feladat (2.9.a) célfüggvényét és (2.9.b) egyensúlyi egyenleteit deriváljuk az idő szerint $t_0 \in [t_1, t_2]$ időpontban, míg a feladat többi feltételét hagyjuk változatlan formában a belső változó elhanyagolásának figyelembevételével. Így az alábbi feladatot kapjuk:

$$\min \left\{ \left(\frac{1}{2} \sigma(t)^* [F] \sigma(t) \right)^* \right\}_{t=t_0} \quad (2.11.a)$$

az alábbi feltételek esetén

$$[G]^* \dot{\sigma}(t) \Big|_{t=t_0} + \dot{p}(t) \Big|_{t=t_0} = 0; \quad (2.11.b)$$

$$f_i(\sigma_k(t), k=1, \dots, z) \Big|_{t=t_0} \leq 0, \quad i=1, \dots, Gn; \quad (2.11.c)$$

$$[F_i] - [\hat{F}_i] \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (2.11.d)$$

Ezekben az egyenletekben az elmozdulási, illetve az erő jellegű peremfeltételeket figyelembe vettük és nem jelöljük ezt külön. Az alakváltozási energiafüggvény idő szerinti deriváltfüggvényét fejtsük Taylor-sorba a $t_0 \in [t_1, t_2]$ helyen:

$$\left(\sigma(t)^* [F] \sigma(t) \right)^* \Big|_{t=t_0} \approx 2 \dot{\sigma}(t_0)^* [F] \sigma(t_0) + \dot{\sigma}(t_0)^* [F] \ddot{\sigma}(t_0) (t - t_0) + \ddot{\sigma}(t_0)^* [F] \sigma(t_0) (t - t_0) + \dots \quad (2.12)$$

A klasszikus modellek az időben lépésről lépésre állítják fel és oldják meg a (2.9.a-f) feladatot. Ha a t_0 időpontban a feszültségeket nullának tekintjük, és a $\dot{\sigma}(t_0)$ -val, mint növekményekkel számolunk, akkor a (2.12)-ből csak a $\dot{\sigma}(t_0)^* [F] \dot{\sigma}(t_0) (t - t_0)$ tag marad, ahol $(t - t_0)$ a lépés nagysága. Adott t érték esetén a célfüggvény minimumpontját a $(t - t_0)$ -val való szorzás nem befolyásolja.

Helyettesítsük a deriváltakat a differencia-hányadossal. A fentieket figyelembe véve a (2.11.a-d) optimális tervezési feladat az alábbi formában adható meg:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \Delta \sigma(t_0)^* [F] \Delta \sigma(t_0) \right\} \quad (2.13.a)$$

az alábbi feltételek esetén

$$[G]^* \Delta \sigma(t_0) + \Delta p(t_0) = 0; \quad (2.13.b)$$

$$f_i((\sigma_k(t_0) + \Delta \sigma_k(t_0)), k=1, \dots, z) \leq 0, \quad i=1, \dots, Gn; \quad (2.13.c)$$

$$[F_i] - [\hat{F}_i] \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (2.13.d)$$

Itt a peremfeltételeket figyelembe vettük és külön nem jelöljük. Amennyiben (2.13.d) egyenlőtlenségben a hajlékonyságot az egyes ismeretlen keresztmetszetek méretével vagy inerciájával helyettesítjük, akkor klasszikus rugalmas-képlékeny optimális tervezés primális feladatát láthatjuk. A (2.13.a-d) feladat az alábbi közelítéseket tartalmazza:

- a disszipációt elhanyagolja;

- a feszültségek időfüggvényeit lépésenként lineárisnak tekinti,
- ennél fogva az elmozdulások időfüggvényeinek idő szerinti deriváltjai (a sebességek) konstansok, azaz vagy nincs mozgás vagy egyenes vonalú egyenletes a mozgás,
- a diszkretizált időpontokban meghatározott növekmények egymástól függetlenek,
- a (2.13.a) célfüggvényt a (2.11.a)-ból vezettük le, amely a (2.9.a)-ból deriválással származik. A (2.9.a-f) és a (2.13.a-d) szélsőértéke csak abban az esetben egyezik meg, ha a (2.13.a-d) feladatban szereplő feszültségek időfüggvényei lineárisak. Vagyis a "legkisebb teljesítmény" elve csak ebben a speciális esetben esik egybe a "minimális energia" elvvel.

Végezetül megállapíthatjuk, hogy a optimális méretezési feladatpár magában foglalja speciális esetként a klasszikus rugalmas-képlékeny optimális tervezés alapfeladatát, de annál szélesebb feladatkört fed le. Benne nemcsak az ismeretlen keresztmetszeti méretek, hanem egyéb képlékenységtani mennyiségek (pl. a képlékeny csuklóban elfordulás) időfüggvényei közvetlen megoldásként kaphatók. A feszültségkorláttal felírt rugalmas-képlékeny optimális méretezési eljárásban az időtől függő állapotváltozókkal megadott feladatok esetén az idő paraméterként történő használatával elkerülhető a sebességmezők használata. Képlékeny állapotban a belső változók használatával a disszipáció folyamata időben követhetővé válik.

3 Lineárisan rugalmas szerkezetek topológiaoptimalása [1,6,8,11, 12, 14,16]

A kutatás célja 2D szerkezetek topológiaoptimalisa a matematikai programozás elméletének és az optimalitási feltétel módszerének felhasználásával igen nagy számú (több ezer) tervezési változó alkalmazásával. A számítási modellhez standard végelelemes számítógépes programot készítettünk négycsomópontú tárcsa-elemek és kétcsomópontú rúdelemek felhasználásával lineárisan rugalmas anyag alkalmazásával. A tervezés során a kiinduláskor adottnak tekintettük a terhelést (egyparaméteres, statikus), a megtámasztásokat és a tervezési tartományt, az ún. "alap"- szerkezetet. A tervezési változók minden esetben a tárcsaelemek vastagságai, illetve a rúdelemek keresztmetszeti területei voltak. Két alapmodellt készítettünk el:

- minimáltuk a szerkezet térfogatát a külső potenciális energia (compliance) nagyságának korlátozásával,
- minimáltuk a külső potenciális energiát – (compliance minimization) - adott

anyagmennyiség esetén.

Ebben a kutatásban az első feladattípussal foglalkozunk egy alapfeladat és egy bővített (támaszoptimalizációs) probléma kapcsán. A számítási modellek mindkét esetben nemlineáris matematikai programozási feladatra vezetnek. Felhasználva az optimalitás feltételét, egy iterációs formulát vezettünk le – SIMP (Solid Isotropic Material with Penaltization) –, amely ellentétben a standard matematikai programozási algoritmusokkal, igen nagy számú tervezési változó felhasználását teszi lehetővé. Vizsgáltuk az analitikusan kapott, illetve a numerikusan kiszámított ún. Michell-típusú optimális topológiák egyezőségét különböző térfogati arányok, merevségek és terhelési esetek kapcsán.

A továbbiakban feltesszük, hogy a kis elmozdulások elmélete érvényes és a számításainkat az elsőrendű elmélet alapján végezzük. Az alkalmazásokat számpéldák szemléltetik.

3.1 Az alkalmazott végeelem típusa

A tervezési tartományt diszkretizáljuk a szokásos módon. Ahogy a bevezetőben említettük a szokásos alkalmazott elemtípus a négycsomópontú, csomópontonként kétszabadságfokú tárcsaelem, mert ennek használata a legalkalmasabb a Prager által definiált „rácsos tartó” típusú optimális szerkezet kialakulásához. Továbbá a szerkezeti megerősítések számításakor (külső, illetve belső) 2D rúdelemet is használtunk. A két típus csomópontonként azonos elmozdulási szabadságfokú, így a numerikus számításokban jól kombinálható.

A továbbiakban a diszkretizált szerkezet csomópontjait tárcsa- vagy és rúdelemekkel kötjük

össze. A tárcsa alakfüggvényei: $N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$; $N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$;

$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$; $N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$. A szerkezet megtámasztásaként fix

támaszok, lineárisan rugalmas rugók, illetve rugalmas rúdelemek kerültek alkalmazásra.

3.2 A feladat megfogalmazása

Ahogy azt az előzőekben jeleztük, itt az optimalitási feltétel (OC) módszerének négy fő lépését valósítjuk meg. Először a topológiaoptimalizációs feladat matematikai programozási megfogalmazását adjuk meg rúdelemek használata nélkül. Majd alkalmazva a Lagrange-féle dualitási elvet, felírjuk a Kuhn-Tucker-feltételeket, és ezeket felhasználva tudjuk megadni az optimalitási iterációs képletet. A jobb megértés érdekében, alkalmazva a végeelemes alapfogalmakat, tekintsük az alábbi tervezési esetet:

- Legyen a lineárisan rugalmas anyagú szerkezet (tárcsa) 2D tervezési tartománya ismert.

A szerkezetet a végeselemes diszkretizálás szabályi szerint osszuk fel G ($g=1,2,\dots,G$) alaptartományra. Az egyes tartományok t_g vastagsága legyen konstans (egységnyi).

Minden alaptartományt osszuk fel további E_s ($e=1,2,\dots,E_s$) elemre. (Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy a hálózat generáláskor egy elsődleges hálózatot készítünk, majd ezt tovább osztjuk egy másodlagos hálózattal.)

- A terhelés egyparaméteres, statikus.
- A megtámasztások adatai adottak.
- Adottak az elmozdulási korlátokat definiáló feltételek – hely ($d=1,2,\dots,D$) és nagyság -.

Felhasználva az előbbi normált vastagságú szerkezetet, a linearitás miatt a feladat könnyen átranzformálható egy $t_g = t_{\max}$ vastagságú szerkezet vizsgálatára. Belátható, hogy a terheket $t_g = t_{\max}$ tetszőleges értékkel beszorozva a kapott feladatban a feszültségek, alakváltozások és elmozdulások azonosak lesznek az eredeti normált feladat eredményeivel.

A szerkezet W súlyát az alábbi módon számíthatjuk:

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g. \quad (3.1)$$

Itt γ_g a szerkezet anyagának fajsúlya, A_g a g -edik alapelem területe. Az elmozdulási korlát a szerkezet adott pontjában a tényleges elmozdulás ismeretében, amit a tartók statikájában ismert módon számíthatunk, felírható:

$$\hat{\mathbf{u}}_d^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \Delta_d \leq 0; \quad (d = 1, \dots, D), \quad (3.2.a)$$

ahol $\hat{\mathbf{u}}_d$ a d -edik helyen és irányban ható, egységnyi nagyságú virtuális erőből számított virtuális csomóponti elmozdulások vektora, \mathbf{K} a szerkezet merevségi mátrixa, \mathbf{u} a \mathbf{P} teherből számított tényleges csomóponti elmozdulások vektora, Δ_d a d -edik elmozdulásra előre megadott korlát nagysága.

Abban az esetben, ha egyetlen elmozdulási korlátot ($d=1$) veszünk fel a szerkezet egy megadott pontjában, és a terhelés is csak itt hat, belátható, hogy (3.2.a) feltétel helyettesíthető a következő kifejezéssel:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - C \leq 0; \quad (3.2.b)$$

ahol C (compliance) a külső potenciális energia. A továbbiakban ezt az (3.2.b) egyenlőtlenséget használjuk a topológiaoptyimálás matematikai programozási feladatában.

Továbbá adjunk meg minden alaptartomány t_g vastagságára egy alsó, illetve egy felső korlátot (praktikusan $t_{\min} \approx 0$ és $t_{\max} = 1$):

$$\begin{aligned} -t_g + t_{\min} &\leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} &\leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ezek a korlátok (0 és 1) gyakorlatilag azt szolgálják, hogy a tervezés eredményeként azt adott elem létezik-e vagy nem. Ahhoz, hogy elkerüljük a közbenső vastagsági értékeket a szerkezet súlyát egy módosított képlettel számoljuk. Az új formula $\tilde{W} = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}}$, ahol p ($p \geq 1$) a büntető paraméter, és szerepe ugyan az, mint a klasszikus OC módszereknél használt büntető paraméter. Megjegyezzük, hogy $t_g = 0$ és $t_g = 1$ esetén a módosított képlet is a tényleges súlyt szolgáltatja.

A topológiaoptimalás alapfeladata büntető paraméterrel kifejezett súly-célfüggvény és „compliance”-feltétel alkalmazásával a következőképpen adható meg:

$$\min \tilde{W} = \min \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} \quad (3.4.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - C \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (3.4.b-d)$$

Az (4) matematikai programozási feladatban az \mathbf{u} csomóponti elmozdulások vektora a $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}$ lineáris egyenletrendszerből meghatározott a ható \mathbf{P} terhelés hatására.

3.3 Az iterációs formula számítása

A numerikus számítás nehézségeinek csökkentése érdekében alkalmazzuk azt a feltételt, hogy az ismeretlen alapelem vastagságok (t_{\min}) alsó korlátjánál a zérus vastagságok helyett egy véges, de igen kicsi értéket vegyünk fel (pl. $t_{\min} = 10^{-6}$). Ezzel a lépéssel a végelemek száma a teljes számítás során konstans érték lesz és a rosszul kondicionált merevségi mátrixot elkerülhetjük. Ha az energiakorlát – a compliance-feltétel - aktív (azaz egyenlőségként teljesül) az (3.4) matematikai programozási feladatban, akkor az előző feltételek felhasználásával a következő egyenletet kapjuk:

$$C - \sum_{g=1}^G \frac{R_g}{t_g} = 0. \quad (3.5)$$

Mivel mind a passzív ($g \in P$), mind az aktív elemek $g \in A$ vastagsága ismert, azaz az előző pont alapján számítható volt, így felírhatjuk a

$$C - \sum_{g \in P} \frac{R_g}{t_g} = \sum_{g \in A} \frac{R_g}{t_g} = \sum_{g \in A} \frac{R_g}{\left(\frac{v p R_g}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}} \quad (3.6)$$

egyenletet, amelyből a v Lagrange-szorító értéke számítható:

$$v^{\frac{p}{p+1}} = \frac{\sum_{g \in A} \left(\frac{A_g \gamma_g}{p} \right)^{\frac{p}{p+1}} R_g^{\frac{1}{p+1}}}{C - \sum_{g \in P} \frac{R_g}{t_g}} \quad (\text{ahol } A \neq 0). \quad (3.7)$$

Az (4) matematikai programozási feladat optimális megoldását tehát iterációs eljárás alkalmazásával megkaphatjuk, ha az optimalitási feltételi egyenletekből, megfelelő sorrendben, a t_g vastagságokat, illetve a v Lagrange-szorító értékét kiszámítjuk.

Könnyen bizonyítható, hogy ha az (3.4) matematikai programozási feladatban a célfüggvényt felcseréljük az energia korláttal, és az ún „compliance” lesz a célfüggvény, a szerkezeti súly pedig feltételként szerepel, akkor az eredeti megfogalmazással egyenértékű feladatot kapunk. Ennek optimális megoldása, bizonyos feltételek mellett, azonos az (3.4) feladat optimális megoldásával, azaz ugyanazt az optimális topológiát kapjuk. Ez az elsőrendű optimalitási feltételek azonosságából következik. Az algoritmus a témához kapcsolódó munkában található.

3.4 A topológiaoptimalítás bővített feladata

A mérnöki gyakorlat sokszor kíván megoldani olyan tervezési feladatot, hogy a megtámasztások helyét, illetve a belső megerősítések mennyiségét vagy/és minőségét kell meghatároznunk. Ez a feladattípus alkalmas a passzív módon való támaszerő szabályzásra, a súlyelhelyezés miatt a konzolhatás erősítésére, a sajátfrekvencia módosításra. A klasszikus támasz-optimalizációs feladatok megjelenése a 70-es évek közepére tehető. A probléma a numerikus nehézségek miatt szinte feltáratlan maradt, és csak néhány éve került ismét a kutatók vizsgálata tárgyává. Rozvany, Lógó és Kaliszky (2003) egy „költség”-függvény alkalmazásával oldotta meg a feladatot rúdtámaszok esetén. Itt a célfüggvény a külső, illetve belső megtámasztások egy alkalmas kombinációját fejezi ki az alábbi módon:

$$\min \left(\sum_i k \ell_i |F_i| + \sum_j b \ell_j |R_j| \right); \quad (3.8)$$

ahol k és b adott konstansok, ℓ_i és ℓ_j az i -edik, illetve j -edik rúd hossza, F_i és R_j az i -edik belső, illetve a j -edik külső támaszerő nagysága.

Így a topológia optimalizációs feladatnál a célfüggvény egy módosított változata kerül felhasználásra, amelynél feltételeztük, hogy a költség arányos a keletkező erő nagyságával, azaz arányos azzal a térfogattal, amit a kérdéses rúddal megadott támasz képvisel. Ennélfogva az erők helyett a lineárisan rugalmas anyag felhasználása miatt az anyagtörvény szerint a $\sigma_y A_0$ mennyiség került bevezetésre (σ_y egy feszültségi határ mérőszáma, és húzásra, illetve nyomásra az egyszerűség kedvéért azonos pozitív értéket tételezzünk fel, A_0 a keresztmetszeti méret). Az abszolút érték jelek így elhagyhatók és az új típusú célfüggvény az alábbi módon írható:

$$\min \left(\sum_i k \ell_i \sigma_{yi} A_i + \sum_j b \ell_j \sigma_{yj} A_j \right). \quad (3.9)$$

A továbbiakban minden támaszt, annak a helyén egy rúdcsoporttal helyettesítünk, oly módon, hogy a rudak minden lehetséges irányban elhelyezésre kerülnek. Továbbá a fix támaszokat is helyettesíthetjük a fentiekben megadott módon. (Ez azt jelenti, hogy egy görgős megtámasztást egységnyi hosszú, de merev rúddal helyettesíthetünk.)

Az előzőleg ismertetett elveket követve a bővített topológiaoptimalizációs feladata „compliance” feltétel esetén formailag az (3.4) matematikai programozási feladattal azonos. Megoldása az ott ismertetett elvek alapján történik.

4 Lágyló anyagú szerkezetek képlékeny határállapot vizsgálata és optimális tervezése [19]

A kutatásban olyan szerkezetek képlékeny határállapot vizsgálatával és optimális tervezésével foglalkoztunk, ahol a szerkezet anyaga húzásra nemlineáris lágyló és egy megadott határfeszültséget vesz figyelembe, míg nyomásra lineárisan rugalmas tökéletesen képlékeny. Ez a fajta anyagi viselkedés matematikailag nem-konvex feladatra vezet.

A numerikus megoldás során a szerkezetet úgy modelleztük, hogy a tervezési tartományt négycsomópontú merev elemekre bontottuk, ahol az elemek normál és nyíró igénybevételek felvételére alkalmas rúgókkal kapcsolódnak egymáshoz. Az anyagi viselkedés ezekre a rúgókra korlátozódik. Az anyagi viselkedés komplexitása azt eredményezte, hogy a szerkezet hajlékonysági mátrixa a határállapot vizsgálat során nem konstans, így az egyes lépésekben frissíteni kell az elemeket.

A nem-konvex viselkedés miatt egy iterációs algoritmust javasoltunk, ami egymásba ágyazott ciklusokat tartalmaz. Ennek részletei dolgozatunkban megtalálható.

5 Összefoglalás

Az ismertett modellek alapján algoritmusokat és számítógépes programokat készítettünk és a feladatokat főleg iterációs úton oldottuk meg. Felírva az optimalitási feltételt, a kapcsolt feladatok megoldását megkaptuk egy matematikai programozási feladat direkt megoldásával, illetve átfogalmazva a többcélfüggvényes matematikai programozás alkalmazásával. Algoritmusunk alapja a szekvenciális kvadratikus programozás volt. A tapasztalataink azt mutatják, hogy hatékonyan használható.

Valamennyi vizsgált feladat esetében számos példát megoldottunk és az eredményeket diagramokkal és táblázatokkal szemléltettük. Parametrikus vizsgálatokat is végeztünk és elemeztük az egyes paramétereknek az eredményekre gyakorolt hatását.

A kidolgozott modellek előnye, hogy különleges esetként a rugalmas illetve a teljesen képlékeny állapotú tartók optimális tervezését is magukba foglalják.

Előírt tervezési tartomány estén a tárcsák optimális anyageloszlásának ismeretében a tárcsák optimális alakja (határvonalak, áttörések) is meghatározható. A módszer tehát topológia optimalásra is alkalmas. Az eredményeket nemzetközi folyóiratokban, nemzetközi és hazai konferencián ismertettük, néhány dolgozatunk pedig elektronikus cikk formájában jelent meg. Részt vettünk és előadást tartottunk az International Society of Structural and Multidisciplinary Optimization (ISSMO) 2 nemzetközi kongresszusán. Előadást tartottunk az ICTAM kongresszusán. Az ISSMO kutatóival és az IPPT (Institute of Fundamental Technological Research, Poland) szoros együttműködésben dolgoztunk. A kutatási időszakban dolgozatainkra számos hivatkozás történt.